Μάθημα 16ο

15/04/16

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 4

ΑΣΚΗΣΗ 1

$\varphi\ \mathbb{Z}_4 \to GL(2, \mathbb{C})$ με $\varphi(1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\varphi(n) = \varphi(n \cdot 1) = (\varphi(1))^n \Leftrightarrow$ ομομορφισμ ομαδων

$\varphi$ 1-1

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}$

$GL(2,\mathbb{C}) = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ , $O\left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 4$

1º Θ.Ι : $\mathbb{Z}_4 \xrightarrow[\cong]{\Phi} \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Phi(n) = \begin{pmatrix} i^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Να βρούμε kerφ: $\varphi(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ με $\mathbb{Z}_4$

$\begin{pmatrix} i^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$i^n = 1$ με $n$ μικρότερο

$i$ , $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

$n = 4 \bmod 4 \equiv 0 \Rightarrow \ker\Phi = \{0\} \Leftrightarrow \varphi$ "1-1"

ΑΣΚΗΣΗ 2:

$\varphi : \mathbb{Z}_4 \to GL(2,\mathbb{C})$ , $\Phi(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi(n) = \varphi(n \cdot 1) = (\Phi(1))^n \Rightarrow \varphi$ ομομορφισμός

$O\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ $\quad O(\varphi(a)) \mid O(a)$

$O(\Phi(1)) = 2 \mid O(1) = 4$

$\ker\varphi = \{0, 2\}$

$\varphi(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^n = 1 \Leftrightarrow n = 2.$

$\ker\varphi \leq \mathbb{Z}_4 \Rightarrow^{1^o \Theta.I.}$
$\parallel$
$\langle [2] \rangle$

$\mathbb{Z}_4 / \langle [2] \rangle \cong \operatorname{Im}\varphi$

$\operatorname{Im}\varphi \leq GL(2,\mathbb{C})$
$\parallel$
$\langle \varphi(1) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_4 / \langle [2] \rangle$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

$\varphi: \mathbb{Z}_4 \longrightarrow GL(2,\mathbb{C})$ με $\varphi(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(n) = \varphi(n \cdot 1) = (\varphi(1))^n \Leftrightarrow$ ομομορφισμ

$\mathbb{C}^* \langle 1 \rangle = \{1, i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1\}$

$o(\varphi(1)) \mid o(1) = 4$

$o(\varphi(1)) = o\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \infty$ Αδύνατο

ΑΣΚΗΣΗ 4:

$\varphi: \Sigma_3 \to GL(3,\mathbb{R})$

$\varphi(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ $\quad \varphi(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$

Έστω $\varphi$ ομομορφισμός.

$\cancel{\{1, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}}$
$\cancel{I \quad A \quad B \neq (\ ;\ ) \neq (\ ;\ ) \neq (\quad )}$

Έχει οριστεί η φ;;;

$\varphi(1,2)=A \quad ,\varphi(1,3)=B \xRightarrow{\text{ομομορφ}}$ η φ ορίζεται σε όλο το $\Sigma_3$;

$\Sigma_3=\langle (1,2,3), (2,3)\rangle=\langle(1,2),(1,3)\rangle$

$\quad\quad\quad\quad\; f \quad\quad\quad g$

$f^3=1=g^2, \; gfg=f^2 \qquad\qquad (1,2,3)=(1,3)(1,2)$

Να εξετάσουμε αν η φ ικανοποιεί τις σχέσεις στους γεννήτορες

$O(1,2)=2=O(1,3)$

$$O\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2 \qquad O\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=2.$$

$$\varphi(1,2,3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$(1,2)(1,3)=(1,3,2)$

$(1,3,2)(1,2)=(2,3)$

$$\varphi((2,3))=\varphi(1,3,2)\varphi(1,2)=\varphi(1,2)\varphi(1,3)\varphi(1,2)$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$(2,3)(1,2,3)(2,3)=(1,2,3)^2=(1,3,2)$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^2$$

Έλεγξε.

ΑΣΚΗΣΗ 5:

$\varphi: G \to K$ επιμορφισμός $K$ αβελιανή

$H \leq G$ με $\ker\varphi \leq H \Rightarrow H \triangleleft G$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ σταθερή

$f = 1$ ταυτοτική $f(1) = 1 = \cancel{f(x)}$

$\varphi: D \to G$ τετριμμένη $\varphi(a) = 1_G$, $\forall a \in D$

$G$ αβελιανή $\varphi(a) = 0$

$\varphi: \langle a \rangle \to G$ αβελιανή

$\varphi(a) = 0_G \Rightarrow \varphi$ τετριμμ.

$\varphi(1) = 0_G \Rightarrow$

$\varphi: \mathbb{Z}_4 \to G$

$\varphi(0) = 1_G$

$\varphi(1) = 1_G \Leftrightarrow$ τετριμ.

$\varphi(1) \neq 1_G \Rightarrow$ όχι τετριμμένη

$G$ $1_G$

$\mathbb{Z}_K$ $0$ $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_K$

$a\beta a^{-1} \in H$, $\forall \beta \in H$ και $\forall a \in G$

$\varphi(\gamma) \in \varphi(H) \Rightarrow \gamma \in \varphi^{-1}\varphi(H) \supseteq H$

$\varphi(a\beta a^{-1}) \, ; \in \varphi(H)$

$\parallel$

$\varphi(a)\varphi(\beta)(\varphi(a))^{-1} \overset{\text{αβελιαν.}}{=\!=} \varphi(a)(\varphi(a))^{-1}\varphi(\beta) = \varphi(\beta) \Rightarrow \varphi(a\beta a^{-1}) \in \varphi(H) \Rightarrow a\beta a^{-1} \in \varphi^{-1}(\varphi(H))$

$\varphi(a\beta a^{-1}) = \varphi(\beta')$ $\beta' \in H$

$\varphi(a\beta a^{-1}(\beta')^{-1}) = 1_K \Rightarrow$

$aba^{-1}(b')^{-1} \in \ker\varphi \subseteq H$
$aba^{-1}(b')^{-1}b' \in H \Rightarrow aba^{-1} \in H$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

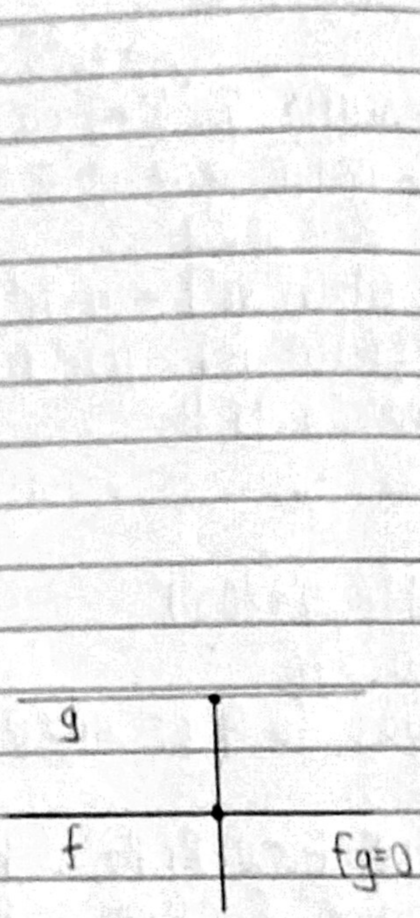
$R=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in \mathbb{Q}\}$ να εξετάσουμε αν είναι δακτύλιος.
$(R,+)$ αβελιανή ✓
$(R,\cdot)$ ημιομάδα, μονοειδές, αντιμεταθετ., επιμεριστική ιδιότητα ✓

$a+b\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow (a+b\sqrt{2})^{-1} \in R$
$R$ αποτελεί σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = R \supseteq \mathbb{Q}$

$a+b\sqrt{2} = a\cdot 1 + b\sqrt{2}$ → γραμμικός συνδυασμός

$\{a\cdot 1+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\} < 1,\sqrt{2} >$

$\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ $\quad 2^2 \equiv 0 \bmod 4$
$\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$ σώμα
$\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ $\quad 2\cdot 3 \equiv 0 \bmod 6$
Δακτύλιοι $\quad$ μηδενοδιαιρέτες
$2,\ 2^2=4,\ 2^3=8\equiv 2$
$3,\ 3^2=9\equiv 3$




$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $R$ δακτύλιος και $a\neq 0$ στοιχείο του $R$.
1) Το $a$ θα καλείται μηδενοδιαιρέτης, αν υπάρχει $b\neq 0$ με $a\cdot b=0$ ή $b\cdot a=0$
2) Το $a$ θα καλείται μηδενοδύναμο, αν υπάρχει φυσικός $n$ με $a^n=0$
3) Το $a$ θα καλείται μονάδα, αν υπάρχει $b$ ώστε $ab=1$ όταν ο $R$ είναι μοναδιαίο

$\mathbb{Z}$ αντιμεταθετικός μοναδιαίος
(όχι σώμα)

ΟΧΙ ΜΗΔΕΝΟΔΙΑΙΡΕΤΕΣ
ΟΧΙ ΜΗΔΕΝΟΔΥΝΑΜΑ
ΟΧΙ ΜΟΝΑΔΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας αντιμεταθετικός μοναδιαίος δακτύλιος καλείται ακέραια περιοχή, αν δεν έχει μηδενοδιαιρέτες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathbb{Z}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\underbrace{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}_{\text{ευθύ άθροισμα}}=\{(r_1,r_2)\mid r_1,r_2\in\mathbb{R}\}$
με πράξεις κατά συντεταγμένες
$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ομάδα
$(r_1,r_2)+(r_1',r_2')=(r_1+r_1',r_2+r_2')$
$(r_1,r_2)(r_1',r_2')=(r_1r_1',r_2r_2')$
Μοναδιαίος $(1,1)$
$(0,2)^{-1}=\;;;$ ΟΧΙ ΣΩΜΑ

$(0,a)(b,0)=(0,0)$
$a\neq 0\quad b\neq 0$
Μονάδες $(a,b)$ με $ab\neq 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $R_1,R_2,\dots,R_k$ δακτύλιοι. Το ευθύ άθροισμα αυτών είναι ο δακτύλιος $R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_k$ με πράξεις κατά συντεταγμένες

ΠΡΟΤΑΣΗ: Το ευθύ άθροισμα είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος ανν είναι ο καθε ένας.
Το ευθύ άθροισμα είναι μοναδιαίος δακτύλιος ανν κάθε ένας είναι μοναδιαίος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Τετριμμένος $\{0\}$
$|R|\geq 2$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:
1) $a\cdot 0=0\cdot a=0\;,\;\forall a\in R$

β) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$ , $\forall a,b \in R$
γ) $(-a)(-b) = ab$ $\forall a,b \in R$
δ) $m(ab) = (ma)b = a(mb)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$, $a,b \in R$
ε) $mn(ab) = (ma)(nb)$ , $\forall m,n \in \mathbb{Z}$ , $a,b \in R$
στ) Αν $R$ μοναδιαίος, τότε $0 \neq 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

α)

$a \cdot 0 = 0$

$a \cdot 0 = a(0+0) = a0 + a0$

$(-a \cdot 0) + a \cdot 0 = (-a0) + a0 + a0$

$0 = 0 + a0 = a0$

β) $a(-b) = -ab$

$a(-b) + ab = a(-b+b) = a \cdot 0 \overset{(a)}{=} 0$

$a(-b) + ab = 0 \iff -ab = a(-b)$

γ) $(\cancel{-a})(-b) = ab$ με τη (β)

$A(-b) = -Ab = -(-a)b = -(-ab) = ab.$

δ) $m$ φυσικός

$m(ab) = ab + ab + \cdots \overset{\oplus}{+} ab = (a + \cdots + a)b = (ma)b$

$= a(b + \cdots + b) = a(mb)$

Για $m$ αρνητικός χρησιμοποιούσε τη (β) και το $\oplus$

Το (ε) έρχεται από το (δ)

$3 \cdot 2(ab) = (2a)b + (2a)b + (2a)b$

$= (2a)(b+b+b) = (2a)(3b)$